PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

JUNIO – 2012

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora.

PROPUESTA A

1º) Dada la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, calcula los parámetros $a,\ b,\ c\in R$ sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x = -1 tiene de pendiente -3 y que f(x) tiene un punto de inflexión de coordenadas (1, 2).

Sabiendo que la pendiente a una función en un punto es el valor de su derivada en ese punto; tiene que ser $f'(-1)=3$:

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \Rightarrow f'(-1)=-3 \Rightarrow 3(-1)^2-2a+b=-3\ ;;\ 3-2a+b=-3\ ;;\ \underline{2a-b=6}\ . \quad (1)$$

Una función tiene un punto de inflexión para los valores de x que anulan la segunda derivada. Por tener un punto de inflexión en P(1, 2) tiene que ser $f''(1)=0$:

$$f''(x)=6x+2a \Rightarrow f''(1)=0 \Rightarrow 6\cdot 1+2a=0\ ;;\ 3+a=0\ ;;\ \underline{\underline{a=-3}}\ .$$

Sustituyendo en (1): $2a-b=6\ ;;\ -6-b=6\ ;;\ b+12=0\ ;;\ \underline{\underline{b=-12}}$

La función resulta: $f(x)=x^3-3x^2-12x+c$.

Por pasar por P(1, 2) tiene que ser $f(1)=2$:

$$f(1)=2 \Rightarrow 1^3-3\cdot 1^2-12+c=2\ ;;\ 1-3-12+c=2\ ;;\ \underline{\underline{c=16}}\ .$$

La función resulta: $\underline{\underline{f(x)=x^3-3x^2-12x+16}}$.

****

2º) a) Esboza la región encerrada entre la parábola $f(x) = x^2 - 1$ y la recta $g(x) = 5 - x$.

b) Calcula el área de la región anterior.

----

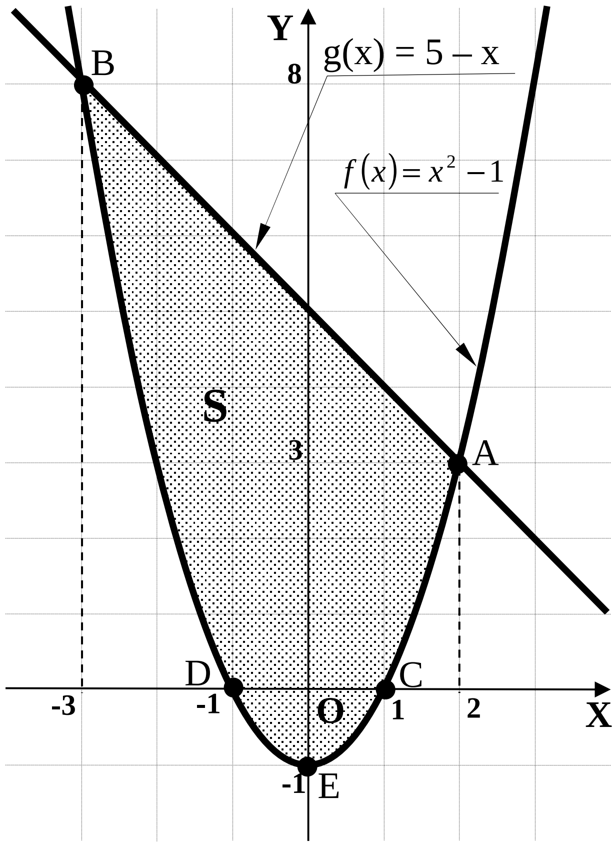
a)

Los puntos de corte de la parábola con la recta son:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 - 1 \\ g(x) = 5 - x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 1 = 5 - x \;;\; x^2 + x - 6 = 0.$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow \underline{A(2,\ 3)} \\ x_2 = -3 \rightarrow \underline{B(-3,\ 8)} \end{cases}.$$



Los puntos de corte de la parábola con los ejes son:

$$Eje\ X \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow \underline{C(1,\ 0)} \\ x_2 = -1 \rightarrow \underline{D(-1,\ 0)} \end{cases}$$

$$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow \underline{E(0,\ -1)} \Rightarrow (Mín.)$$

La representación gráfica de las dos funciones es, aproximadamente, la que indica la figura.

b)

Como puede apreciarse, en el intervalo correspondiente al área a calcular, las ordenadas de la recta son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola.

El área pedida es la siguiente:

$$S = \int_{-3}^{2} [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_{-3}^{2} [(5-x) - (x^2 - 1)] \cdot dx = \int_{-3}^{2} (-x^2 - x + 6) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-3}^{2} =$$

$$=\left(-\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}+6\cdot 2\right)-\left[-\frac{(-3)^3}{3}-\frac{(-3)^2}{2}+6\cdot(-3)\right]=-\frac{8}{3}-2+12-9+\frac{9}{2}+18=19-\frac{8}{3}+\frac{9}{2}=$$

$$=\frac{114-16+27}{6}=\frac{114+11}{6}=\underline{\underline{\frac{125}{6}\ u^2=S}}\ .$$

****

3º) a) Discute el sistema de ecuaciones lineales : $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ mx+(m+1)y+(m-1)z=m-2 \\ 3x+(m+3)y+4z=m-2 \end{cases}$ en función del parámetro $m \in R$.

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible determinado.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ m & m+1 & m-1 \\ 3 & m+3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ m & m+1 & m-1 & m-2 \\ 3 & m+3 & 4 & m-2 \end{pmatrix}.$$

Determinamos en primer lugar el rango de M' en función del parámetro m:

$$|M'|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ m & m+1 & m-1 & m-2 \\ 3 & m+3 & 4 & m-2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} C_2-C_1 \\ C_3-C_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ m & 1 & -2 & m-2 \\ 3 & m & 1-m & m-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & m-2 \\ m & 1-m & m-2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_2-C_1\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & m-2 \\ m & 1-2m & m-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & m-2 \\ 1-2m & m-2 \end{vmatrix} = (m-2)\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1-2m & 1 \end{vmatrix} = (m-2)\cdot(-3-1+2m)=$$

$$=(m-2)(2m-4)=2\cdot(m-2)^2=0 \Rightarrow \underline{m=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m\neq 2 \Rightarrow Rango\ M<4\ ;;\ Rango\ M'=4 \Rightarrow Incompatible}}$$

Para m = 2 es $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; teniendo en cuenta que $F_2 + F_3 = F_4$, el rango de M es el siguiente:

$$Rango\ \ M \Rightarrow \{F_1,\ F_2,\ F_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2+3+6-4-9-1=11-14=-3\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m=2 \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=3=n^o\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ determinado}}$$

b)

Para m = 2 el sistema resulta $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 3x+5y+4z=0 \end{cases}$, que es homogéneo, por lo cual admite solamente la solución trivial:

Solución: x = y = z = 0

****

4º) a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $\pi \equiv x - y + 3z = -3$ con los ejes de coordenadas.

b) Si llamamos A, B y C a los vértices del triángulo del apartado anterior, encuentra el valor del parámetro $\lambda \in R$ para que el tetraedro de vértices A, B, C y $D(-\lambda^2,\ 2+\lambda,\ -3)$ tenga volumen mínimo.

----

a)

Los puntos de corte del plano $\pi \equiv x - y + 3z = -3$ con los ejes de coordenadas se obtienen haciendo igual a cero las variables que no coincidan con el eje:

$$Eje\ \ X \rightarrow \left\{\begin{matrix} y=0 \\ z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=-3 \Rightarrow \underline{A(-3,\ 0,\ 0)} \quad ;; \quad Eje\ \ Y \rightarrow \left\{\begin{matrix} x=0 \\ z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=3 \Rightarrow \underline{B(0,\ 3,\ 0)}.$$

$$Eje\ \ Z \rightarrow \left\{\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z=-1 \Rightarrow \underline{C(0,\ 0,\ -1)}.$$

Los vectores que determinan el triángulo son:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 3,\ 0) - (-3,\ 0,\ 0) = \underline{(3,\ 3,\ 0)}.$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ 0,\ -1) - (-3,\ 0,\ 0) = \underline{(3,\ 0,\ -1)}.$$

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determinan los vectores $\overrightarrow{AB}\ \ y\ \ \overrightarrow{AC}$. Conviene saber que el área del paralelogramo es igual que el módulo del producto vectorial de los vectores que lo determinan, por lo tanto:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{matrix}\right\| = \frac{3}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{matrix}\right\| = \frac{3}{2}\cdot\left|-i-3k+j\right| = \frac{3}{2}\cdot\left|-i+j-3k\right| =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+(-3)^2} = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{1+1+9} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{11}}{2}\ u^2 = S_{ABC}}}.$$

b)

El volumen del tetraedro es un sexto del valor absoluto del producto mixto de los tres vectores que lo determinan.

Los vectores que lo determinan son:

$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\ \ \text{y}\ \ \overrightarrow{AD} = D - A = (-\lambda^2,\ 2+\lambda,\ -3) - (-3,\ 0,\ 0) = (3-\lambda^2,\ 2+\lambda,\ -3).$$

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\cdot\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 3-\lambda^2 & 2+\lambda & -3 \end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 3-\lambda^2 & 2+\lambda & -3 \end{vmatrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left|-\left(3-\lambda^2\right)+(2+\lambda)+9\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|-3+\lambda^2+2+\lambda+9\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\lambda^2+\lambda+8\right|.$$

Por ser $\lambda^2+\lambda+8>0,\ \forall\lambda\in R$, es $V_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot\left(\lambda^2+\lambda+8\right)$.

El volumen será mínimo para los valores de λ que anulen la primera derivada y hagan positiva la segunda derivada:

$$V'_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot(2\lambda+1)=0\ \Rightarrow\ \underline{\lambda=-\frac{1}{2}}.$$

El volumen del tetraedro V_{ABCD} es mínimo para $\lambda=-\frac{1}{2}$

****

PROPUESTA B

1º) La concentración (en %) de nitrógeno de un compuesto viene dada, en función del tiempo, $t \in [0,\ +\infty)$ medido en segundos, por la función $N(t)=\frac{60}{1+2e^{-t}}$.

a) Comprueba que la concentración de nitrógeno crece con el tiempo. ¿Para que tiempo $t \in [0,\ +\infty)$ la concentración de nitrógeno es mínima y cuál es esta concentración?

b) ¿A qué valor tiende la concentración de nitrógeno cuando el tiempo tiende a infinito?

----

a)

La concentración crece cuando su derivada es positiva:

$$N(t)=\frac{60}{1+2e^{-t}}=\frac{60}{1+\frac{2}{t}}=\frac{60}{\frac{t+2}{t}}=60\cdot\frac{t}{t+2}.$$

$$N'(t)=60\cdot\frac{1\cdot(t+2)-t\cdot 1}{(t+2)^2}=60\cdot\frac{t+2-t}{(t+2)^2}=\frac{120}{(t+2)^2}=\underline{N'(t)>0,\ \forall t\in[0,\ +\infty)}.$$

<u>En efecto, la concentración de nitrógeno crece con el tiempo, como se ha demostrado.</u>

<u>Evidentemente la concentración es mínima para t = 0.</u>

El valor de la concentración mínima es el siguiente:

$$N(0)=\frac{60}{1+2e^0}=\frac{60}{3}=20.$$

<u>La concentración mínimo de nitrógeno es del 20 %.</u>

b)

$$\lim_{t\to+\infty} N(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{60}{1+2e^{-t}}=\lim_{t\to+\infty}\left(60\cdot\frac{t}{t+2}\right)=60\cdot\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{t+2}=60\cdot 1=\underline{60}.$$

<u>Cuando el tiempo tiende a infinito la concentración de nitrógeno es del 60 %.</u>

****

2º) Calcula las siguientes integrales: $I_1 = \int \frac{1}{4+9x^2} \cdot dx$ e $I_2 = \int \left(tag\ x + \frac{1}{tag\ x} \right) \cdot dx$.

$$I_1 = \int \frac{1}{4+9x^2} \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{1+\frac{9x^2}{4}} \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{3x}{2} = t \\ dx = \frac{2}{3} \cdot dt \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \int \frac{1}{1+t^2} \cdot dt = \frac{1}{6} \cdot arc\ tag\ t + C = \underline{\underline{\frac{1}{6} \cdot arc\ tag\ \frac{3x}{2} + C = I_1}}\ .$$

$$I_2 = \int \left(tag\ x + \frac{1}{tag\ x} \right) \cdot dx = \int \left(\frac{sen\ x}{\cos\ x} + \frac{\cos\ x}{sen\ x} \right) \cdot dx = \int \frac{sen\ x}{\cos\ x} \cdot dx = \int \frac{\cos\ x}{sen\ x} \cdot dx = \underline{A + B = I_2}\ .$$

$$A = \int \frac{sen\ x}{\cos\ x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \cos\ x = t \\ -sen\ x \cdot dx = dt \end{array} \right\} \Rightarrow A = -\int \frac{1}{t} \cdot dt = -L\,t + C = \underline{-L(\cos\ x) + C = A}\ .$$

$$B = \int \frac{\cos\ x}{sen\ x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} sen\ x = t \\ \cos\ x \cdot dx = dt \end{array} \right\} \Rightarrow B = \int \frac{1}{t} \cdot dt = L\,t + C = \underline{L(sen\ x) + C = B}\ .$$

Sustituyendo los valores de A y B obtenidos:

$$I = -L(\cos\ x) + L(sen\ x) + C = L\left| \frac{sen\ x}{\cos\ x} \right| + C = \underline{L|tag\ x| + C}\ .$$

$$\underline{\underline{I_2 = \int \left(tag\ x + \frac{1}{tag\ x} \right) \cdot dx = L|tag\ x| + C}}$$

****

3º) a) Sean A y B matrices cuadradas de orden $n \in N,\ n \geq 2$, tales que B es la inversa de A:

1) Si $|A| = 3$, razona cuando vale $|B|$.

2) ¿Cuál es el rango de B?

b) Siendo $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, calcula el determinante de la matriz cuadrada X de orden 3.

----

a)

$$B = A^{-1} = \frac{1}{A} \Rightarrow |B| = \left|\frac{1}{A}\right| = \left|\frac{I}{A}\right| = \frac{1}{|A|} = \underline{\underline{\frac{1}{3} = |B|}}.$$

Teniendo en cuenta que $|B| \neq 0$, el rango de B se deduce del enunciado:

$\underline{\underline{\text{Rango de B} = n \geq 2}}$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} \cdot |X| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \ ;;\ 21 \cdot |X| = 21 \Rightarrow \underline{\underline{|X| = 1}}.$$

****

4º) Dados el plano $\pi \equiv 2x - z = 6$ y la recta $r \equiv \begin{cases} y + z = 0 \\ x - y + az = 4 \end{cases}$:

a) Encuentra el valor del parámetro $a \in R$ para que π y r son paralelos.

b) Para el valor de α del apartado anterior, da la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

----

a)

Un vector director de r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\overrightarrow{n_1} = (0,\ 1,\ 1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,\ -1,\ a)$.

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = ai + j - k + i = (a+1)i + j - k \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (a+1,\ 1,\ -1).$$

El vector normal del plano $\pi \equiv 2x - z = 6$ es $\overrightarrow{n} = (2,\ 0,\ -1)$.

La recta r y el plano π son paralelos cuando el vector director de r y el vector normal de π son perpendiculares, o sea, cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Rightarrow (a+1,\ 1,\ -1) \cdot (2,\ 0,\ -1) = 2a + 2 + 0 + 1 = 0\ ;;\ 2a = -3\ ;;\ \underline{\underline{a = -\frac{3}{2}}}.$$

b)

Para $a = -\frac{3}{2}$ la recta r es $r \equiv \begin{cases} y + z = 0 \\ x - y - \frac{3}{2}z = 4 \end{cases}$ o mejor: $r \equiv \begin{cases} y + z = 0 \\ 2x - 2y - 3z = 8 \end{cases}$.

Para encontrar un punto de r la expresamos por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} y + z = 0 \\ 2x - 2y - 3z = 8 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda}\ ;;\ \underline{y = -\lambda}\ ;;\ 2x + 2\lambda - 3\lambda = 8\ ;;\ \underline{x = 4 + \tfrac{1}{2}\lambda}.$$

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = 4 + \frac{1}{2}\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}} \Rightarrow \text{Un punto de r es A(4, 0, 0) y un vector director } \overrightarrow{v_r} = (1,\ -2,\ 2).$$

La expresión general del plano π' es la siguiente:

$$\pi'\left(A;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{n}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y & z \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ 2(x-4)+4y+4z+y=0\ ;;\ 2x-8+5y+4z=0\ ;;$$

$$\underline{\underline{\pi' \equiv 2x+5y+4z-8=0}}$$

****